Komplexe Zahlen:

$(z_2 - z_1)$ um 90° drehen $\to i(z_2 - z_1)$ $\quad |\arg z| \to \phi$ Phase, $|z|$ Länge

Wurzeln in $\mathbb{C}$: $z^n - 1 = 0 \Rightarrow z \quad = \quad \sqrt[n]{1} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi k}{n}} \dots\right\} k = 1 \dots n-1;$

$$z = \sqrt[n]{a} \;\; a = |a|\, e^{i\phi} \;\; \tan\phi = \tfrac{\mathrm{Im} z}{\mathrm{Re} z} \quad \sqrt[n]{a} = \left\{ \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{\phi}{n}} ! - ! e^{i\frac{2\pi k}{n}} \dots \right\} k = \text{s.o.}$$

Geometrische Summenformel: $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow z = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}$
für $z = 1 := n+1$, für $|x| < 1 \to z = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}$

Bei Beweisen zur Konvergenz erst einschränkende Folgen zeigen, dann die Eingeschränkte (inf $= \dots$, sup $= \dots$)

Spezielle Formeln und Reihen:

$$\sqrt[n]{n} = 1; \quad a_n = a_0 q^n, \frac{a_{n+1}}{a_n} = q; \quad \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad 1 + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3$$

$$\sum_1^n \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2; \quad 1 + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3; \quad \sum_0^\infty \frac{x}{k!} = e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$1, \sqrt{n}, \sqrt{n\sqrt{n}}, \sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} \to n; \quad 1, \sqrt{n}, \sqrt{n+\sqrt{n}}, \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} \to \frac{n}{2};$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{q}{q-p}; \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2; \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = \infty; \text{(harmonische Reihe)}$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}; \quad \cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}; \quad \cos x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cdot x^{k+1}}{k+1}; \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^\infty (-x)^k; x \text{ beliebig}$$

$$\text{Binomialreihe: } (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} x^2 + \dots +;$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots, \text{ falls } |x| < 1$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots; \ \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \ x \in \mathbb{R}$$

Polynome: $p(x)$ mit $p^{(n)}(0) = 1, p^{(k)}(0) = 0 \Rightarrow p(x) = \frac{x^n}{n!}$
Bl. 6: Partielle Integration: $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{dx} = [u(x)v(x)] - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{dx}$
$a \ln x = \ln x^a$; $\quad \int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{dx} = \ln(\ln x)$
Mittelwertsatz: $f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Kurven:

$$\text{Länge } L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{dt}; \text{ für Graphen: } L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{dx}$$

$$\text{Krüm. } \kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}; \text{ Graphen: } \kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}; \ r = \frac{1}{|\kappa|}$$

$$\begin{aligned} \text{M'pkt:} \quad x_M &= x(t) - \dot{y}(t) \cdot \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)} &&= x(t) - \frac{1}{\kappa}\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \\ y_M &= y(t) + \dot{x}(t) \cdot \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)} &&= y(t) + \frac{1}{\kappa}\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \end{aligned}$$

$$\text{Fläche:} \qquad F = \frac{1}{2}\left|\int_a^b [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]\,\mathrm{dt}\right| \qquad \text{(Leibniz-Sektorformel)}$$

Polardarstellung: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\phi) + \left(\frac{\mathrm{d}r(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\mathrm{d}\phi$; $\quad F = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)\mathrm{d}\phi$
$x = r \cdot e_r$; $\quad \dot{x} = \dot{r} \cdot e_r + r_\phi + e_\phi$; $\quad \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})e_\phi$
mit $e_r = \binom{\cos\phi}{\sin\phi}$; $e_\phi = \binom{-\sin\phi}{\cos\phi}$

Volumen Rot-Krp: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{dx}$; Fläche: $M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{dx}$

Folgen/Reihen:
Leibniz-Regel $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^\infty \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{n-k}(x)$

Cauchy-Konvergenz: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

$$\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \;\exists\; N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m > N_\epsilon : |s_n - s_m| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_k = 0$$

Leibniz altern.: $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots, \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k =: S \text{ konvergiert.; } |S - S_n| \leq a_n + 1$$

Regeln f. konv. Reihen: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b, \sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot a$$

Klammersatz: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow S = (a_0 + a_1 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}) + \dots$$

In konvergenten Reihen darf man Klammern setzen.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ abs. konv. $\Rightarrow |a_0|, |a_0| + |a_1|, |a_0| + |a_0| + \dots$ ist beschränkt.

Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} < 1 & \text{absolut konvergent} \\ > 1 & \text{nicht konvergent} \end{cases}$

Maj.-/Vergl.-krit.: $0 \leq |a_k| \leq b_k;\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konv.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$$

Cauchy-Produkt: $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

$\int \cosh^2 x = \int \frac{1}{2}(1 + \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{dx} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh\left(\frac{1}{x}2\right)$

Konvergenzradius: $R \in \mathbb{R} \cup \infty \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konv. abs. für $|x| < R$

$R = \left|\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$; für $|x| < R$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ stetig diffbar;

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$

Hat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k (= f(x))$ den K-Rad $R > 0$, $\rightarrow f$ hat Stammfkt. in $]-R, R[$.

Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen:

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k \Rightarrow a_k = b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Taylor-Polynom:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_{n+1}(x,a)$

Cauchy: $R_{n+1}(x,a) = \frac{1}{x!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{dt}$

Lagrange: $R_{n+1}(x,1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}; a \leq \xi \leq x$

Kurvendiskussion:

①	Def.-Bereich / Wertebereich	⑤	f' mit Nullstellen
②	Symmetrie	⑥	Extrema, Monotonie
	f gerade $\rightarrow$ Achsensymmetrie	⑦	f'' mit Nullstellen
	f ungerade $\rightarrow$ Punktsymmetrie	⑧	WP, Krümmungsbereiche
③	Unstetigkeitsstellen:	⑨	Schräge / horz. Asympt.
	Grenzwerte; Polen	⑩	Kuvenverlauf zeichnen.
④	Nullstellen, VZ von f		

Satz von l'Hostpital: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) \to 0}{g(x) \to 0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Abl. Umkehrfkt: $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

$$g''(x) = \frac{f''(g(x))g'(x)}{(f'(g(x)))^2} = -f''(g(x))(g'(x))^3$$

$$g'''(x) = -f'''(g(x))(g'(x))^4 - 3f''(g(x))(g'(x))^2 \cdot g''(x)$$

Grundsätzlich probieren: $x = g(f(x)) = f(g(x))$?

$$\left.\begin{array}{l}\text{injektiv: jedem } x\text{-Wert wird höchstens } 1 y\text{-Wert zugeordnet} \\ \text{surjektiv: jeder } y\text{-Wert wird mind. } 1\times \text{ angenommen}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{bijektiv: hat} \\ \text{Umkehrfkt.}\end{array}$$

Besondere Ableitungen:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \operatorname{arsech}' x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{artanh}' x = \cosh^2(\operatorname{artanh} x)$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad = \tan^2 x + 1$$

e-Formen / Hyperbolicus-Funktionen:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x \qquad \sinh' x = \cosh x \qquad \cosh' x = \sinh x$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad \operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{artanh} x = \ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$$

$$x^y = e^{y \ln x}$$

Additionstheoreme:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \qquad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin(2x) = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \qquad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

Matrizen:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\cdot B_{11} + A_{12}\cdot B_{21} & A_{11}\cdot B_{12} + A_{12}\cdot B_{22} \\ A_{21}\cdot B_{11} + A_{22}\cdot B_{21} & A_{21}\cdot B_{12} + A_{22}\cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Transponierte: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{pmatrix}$

Inverse: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}}_{\text{Inverse}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} ax + by = 1 & au + bv = 0 \\ cx + dy = 0 & cu + dv = 1 \end{array}$

Simultane Lösungen: A invertierbar $\Leftrightarrow$ LGS eindeutig lösbar

$\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$

Gauß-Jordan: $\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline \ldots & \ldots \end{array}$ So umformen, dass zum Schluss links die Einheitsmatrix steht. Rechts unten ist dann A^{-1}.

$\det(x, y) = 0 \rightarrow$ linear abhängig. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar.

$\det(E) = 1; \quad \det(c \cdot E) = c^n$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Dimension Spaltenraum $=$ Rang A

Dimension Kern $= n -$ Rang A (Anzahl Spalten $-$ Rang A)